Accueil

$x^3 + y^3 = n$

Extrait d'un article de CNRS (http://images.math.cnrs.fr/Quelques-proprietes-des-carres.html) :

« ... Déterminer si l'équation d'une courbe elliptique admet ou pas une infinité de solutions est l'objet d'une conjecture célèbre, formulée dans les années 1960...

... On dispose de résultats partiels sur cette conjecture. En ce qui concerne l'équation $x^3 + y^3 = p$, on peut montrer que lorsque p=3 ou lorsque p est impair et de la forme 9k+2 ou 9k+5, l'équation n'a pas de solutions, et donc p n'est pas somme de deux cubes...

... Lorsque p est de la forme 9k+4 ou 9k+7, l'équation a une infinité de solutions, et donc p est somme de deux cubes d'une infinité de manières différentes...

...Tous les spécialistes s'accordent à dire que des idées nouvelles sont nécessaires pour résoudre le cas général... »

Cette formule permet de calculer tous les entiers x et y pour n'importe quel entier p.

Théorème 6a

Quelque soit n entier naturel non nul divisible par d, l'équation $x^3 + y^3 = n$ admet au moins une solution dans N si $12dn - 3d^4$ est un carré parfait. La formule est de cette forme :

$$\left(\frac{3d^2 + \sqrt{12dn - 3d^4}}{6d}\right)^3 + \left(\frac{3d^2 - \sqrt{12dn - 3d^4}}{6d}\right)^3 = n$$

d est un diviseur de n ; $0 < d \leq \sqrt[3]{4n}$

Remarques

- $\forall$ p entier non nul, si n peut être décomposé en somme de deux cubes, alors le nombre de solutions est fini, puisque les diviseurs de n le sont.
- Si 12dn - 3d^4 n'est pas un carré parfait pour aucun des diviseurs d de n, alors l'équation n'a pas de solution entière.

Exemple

$x^3 + y^3 = 189$

$d_{189} = \{1, 3, 7, 9\}$

On pose $\Delta = 12dn - 3d^4$

d	1	3	7	9
$\sqrt{\Delta}$	$\notin \aleph$	81	$\notin \aleph$	27
x		6		5
y		-3		4

Les solutions sont $6^3 + (-3)^3$ et $5^3 + 4^3$.

La liste des n < 1000 possédant une solution dans N :

n	d	x	y
1	1	1	0
2	2	1	1
7	1	2	-1

8	2	2	0
9	3	2	1
16	4	2	2
19	1	3	-2
26	2	3	-1
27	3	3	0
28	4	3	1
35	5	3	2
37	1	4	-3
54	6	3	3
56	2	4	-2
61	1	5	-4
63	3	4	-1
64	4	4	0
65	5	4	1
72	6	4	2
91	1	6	-5
91	7	4	3
98	2	5	-3
117	3	5	-2
124	4	5	-1
125	5	5	0
126	6	5	1
127	1	7	-6
128	8	4	4
133	7	5	2
152	2	6	-4
152	8	5	3
169	1	8	-7
189	3	6	-3
189	9	5	4
208	4	6	-2
215	5	6	-1
216	6	6	0
217	1	9	-8
217	7	6	1
218	2	7	-5
224	8	6	2
243	9	6	3
250	10	5	5
271	1	10	-9
279	3	7	-4
280	10	6	4
296	2	8	-6
316	4	7	-3
331	1	11	-10

335	5	7	-2
341	11	6	5
342	6	7	-1
343	7	7	0
344	8	7	1
351	9	7	2
370	10	7	3
386	2	9	-7
387	3	8	-5
397	1	12	-11
407	11	7	4
432	12	6	6
448	4	8	-4
468	12	7	5
469	1	13	-12
485	5	8	-3
488	2	10	-8
504	6	8	-2
511	7	8	-1
512	8	8	0
513	3	9	-6
513	9	8	1
520	10	8	2
539	11	8	3
547	1	14	-13
559	13	7	6
576	12	8	4
602	2	11	-9
604	4	9	-5
631	1	15	-14
637	13	8	5
657	3	10	-7
665	5	9	-4
686	14	7	7
702	6	9	-3
721	1	16	-15
721	7	9	-2
728	2	12	-10
728	8	9	-1
728	14	8	6
729	9	9	0
730	10	9	1
737	11	9	2
756	12	9	3
784	4	10	-6
793	13	9	4

817	1	17	-16
819	3	11	-8
854	14	9	5
855	15	8	7
866	2	13	-11
875	5	10	-5
919	1	18	-17
936	6	10	-4
945	15	9	6
973	7	10	-3
988	4	11	-7
992	8	10	-2
999	3	12	-9
999	9	10	-1
1000	10	10	0

Le premier nombre décomposé en		Décomposition
1 cube	2	$1^3 + 1^3$
2 cubes	91	$6^3 + (-5)^3$; $4^3 + 3^3$
3 cubes	728	$12^3 + (-10)^3$; $9^3 + (-1)^3$; $8^3 + 6^3$
4 cubes	2 741 256	$207^3 + (-183)^3$; $168^3 + (-126)^3$; $140^3 + (-14)^3$; $114^3 + 108^3$
5 cubes	6 017 193	$246^3 + (-207)^3$; $209^3 + (-146)^3$; $185^3 + (-68)^3$; $180^3 + 57^3$; $166^3 + 113^3$
6 cubes	Aucun $< 10^9$	
