Accueil

$x^2 + y^2 = z^2$

Pour trouver les triplets pythagoriciens on utilise les relations de Pythagore, de Platon ou d'Euclide ou encore des formes géométriques.
Mais aucune de ces méthodes ne permet de déterminer tous les triplets.
Le contenu de ce document permet, entre autres, de calculer tous les triples possibles.

A. Triplets pythagoriciens

Théorème 4a

Quelque soit x entier non nul

$$\mathbf{x^2 + \left(\frac{x^2 - d^2}{2d}\right)^2 = \left(\frac{x^2 + d^2}{2d}\right)^2}$$

d étant un diviseur de x^2. $0 < d < |x|$.
Si x est pair, d et $\frac{x^2}{d}$ doivent être pairs.

$\left(x^2, \frac{x^2-d^2}{2d}, \frac{x^2+d^2}{2d}\right)$ est la formule générale des triplets pythagoriciens.

Remarques

- $\forall x \geq 3, x^2 + \left(\frac{x^2-d^2}{2d}\right)^2 = \left(\frac{x^2+d^2}{2d}\right)^2$ admet au moins une solution (avec $d = 1$ pour les nombres impairs (relation de Pythagore) et $d = 2$ pour les nombres pairs)

- Le carré de tout entier $x \geq 3$ est une différence de 2 carrés. $x \geq 3$, car $x = 1$ n'a pas de diviseur inférieur à 1, et si $x = 2$, 4 n'a pas de diviseur pair inférieur à 2.
  Donc **$x^2 \pm 1$ et $x^2 \pm 2^2$ ne sont pas des carrés parfaits $\forall\, x \neq 0$.**

B. Triangles de Pythagore

Chaque triplet pythagoricien forme un triangle à côtés entiers appelé triangle de Pythagore.

La formule $\left(x^2, \frac{x^2-d^2}{2d}, \frac{x^2+d^2}{2d}\right)$ produit tous les triangles possibles pour tout $x \geq 3$.

Il existe n triangles de Pythagore dont x est l'un des deux côtés ;
$n \leq \frac{Nd(x^2)-1}{2}$ (il y a égalité si x est impair)
On note par $Nd(x^2)$ le nombre des diviseurs de x^2, y compris x^2 lui même et l'unité.

Angles du triangle :

L'angle Z opposé à l'hypoténuse vaut $\pi/2$.
La somme des angles X et Y adjacents à l'hypoténuse vaut $\pi/2$:

$\mathrm{Cos}(X) = \frac{x^2 - d^2}{x^2 + d^2}$ et $\mathrm{Cos}(Y) = \frac{2dx}{x^2 + d^2}$

C. Quelques propriétés des triangles de Pythagore

Soit (x, y, z) un triangle rectangle en (x, y) :

1. $\mathbf{z - y = d}$

$$z - y = \frac{x^2+d^2}{2d} - \frac{x^2-d^2}{2d} = d.$$

2. $y \leq \frac{x^2-1}{2}$; il y a égalité si x est impair.

$y = \frac{x^2-d^2}{2d}$, y est maximal lorsque d est minimal ($d = 1$)

3. $z < x + y < 2z$

- $z < x + y \rightarrow x^2 + \frac{x^2-d^2}{2d} > \frac{x^2+d^2}{2d} \rightarrow x > d$ (après simplification). $x > d$ est vrai car c'est l'une des conditions de l'équation.
- $x < z$ et $y < z$ donc $x + y < 2z$.

4. **Aucun triangle de Pythagore n'est isocèle** ($x = y$)

Si $x = y$ alors $\frac{x^2-d^2}{2d} = x \rightarrow d^2 + 2xd - x^2 = 0$
$\Delta = 8x^2 \rightarrow d = x(\sqrt{2} - 1)$.
Or $\sqrt{2}$ est irrationnel, donc d ne peut être un nombre entier $\Rightarrow x \neq y$.

5. $x < y$ *si* $d < x(\sqrt{2} - 1)$

$x < \frac{x^2-d^2}{2d} \rightarrow d^2 + 2xd - x^2 < 0.$

$\Delta = 8x^2 \rightarrow d < x(\sqrt{2} - 1)$.

6. **y n'est jamais un multiple de x.**

   Si $y = nx \rightarrow \frac{x^2 - d^2}{2d} = nx \rightarrow d^2 + 2nxd - x^2 = 0$

   $\Delta = 4x^2(n^2 + 1) \rightarrow d = x(-n + \sqrt{n^2 + 1})$.

   $\sqrt{n^2 + 1} \in \mathbb{N}$ seulement si $n = 0 \rightarrow d = x$.

   Or $d < x$ (Théorème 4a) sinon $y = 0$

   $\Rightarrow \frac{x^2 - d^2}{2d} \neq nx$.

7. **z ne peut être ni un multiple de x ni un multiple de y.**

   - $z = nx$

     $\frac{x^2 + d^2}{2d} = nx \rightarrow d^2 - 2nxd + x^2 = 0$

     $\rightarrow \Delta = 4n^2x^2 - 4x^2 = 4x^2(n^2 - 1)$

     Or $\sqrt{\Delta} = 2x\sqrt{n^2 - 1}$ n'est pas un nombre entier.

   - $z = ny$

     Donc $x^2 + d^2 = n(x^2 - d^2)$

     $\rightarrow$ après simplification : $\frac{x^2}{d} = \frac{n+1}{n-1}d$.

     $\frac{x^2}{d}$ est un entier. $\frac{n+1}{n-1}d$ est entier uniquement si $n = 2$ ou $n = 3$; Dans ce cas $\frac{n+1}{n-1} = 2$ ou 3.

     $\rightarrow x^2 = 2d^2$ ou $x^2 = 3d^2$, ce qui est impossible car ni 2 ni 3 n'est un carré.

8. **(3, 4, 5) est le seul triangle dont les trois côtés sont consécutifs.**

   x, y et z sont consécutifs si $z - y = y - x = 1$.

   On a vu plus haut (dans le premier point) que $z - y = d$, donc $d = 1$.

   $y - x = 1 \rightarrow \frac{x^2 - 1}{2} - x = 1 \rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$.

   $\Delta = 16 \rightarrow x = 3$

   $x = 3$, $y = 4$ et $z = 5$ est la seule solution.

9. **(3, 4, 5) est le seul triangle, hormis ses multiples, dont les côtés forment une progression arithmétique.**

   x, y et z forment une progression arithmétique si $z - y = y - x$.

   $z - y = d \Rightarrow y - x = d$

   $y - x = \frac{x^2 - d^2}{2d} - x = d \rightarrow x^2 - 2dx - 3d^2 = 0$.

   $\Delta = 16d^2 \rightarrow x = 3d$

   (x, y, z) forment une progression arithmétique si $(x, y, z) = d(3, 4, 5)$; $d \in \mathbb{N}$.

10. **Il n'existe que 2 triangles dont la surface est égale au périmètre : (5, 12, 13) et (6, 8, 10)**

    $S = \frac{xy}{2} = \frac{x(x^2 - d^2)}{4d}$.

    $P = x + y + z = \frac{x^2 + dx}{d}$.

$\frac{x(x^2-d^2)}{4d} = \frac{x^2+dx}{d} \rightarrow\ x^2 - 4x - (d^2 + 4d) = 0.$

$\Delta = 4(d^2 + 4d + 4), \rightarrow x = 2 + \sqrt{d^2 + 4d + 4}.$

Pour que x soit un entier, il faut que $\sqrt{d^2 + 4d + 4}$ soit carré parfait.

$d^2 + 4d + 4 = (d + 2)^2 \qquad \Rightarrow x = 2 + \sqrt{(d + 2)^2} = d + 4$

d est un diviseur de x^2 $\Rightarrow \frac{x^2}{d} = \frac{(d+4)^2}{d} = d + 8 + \frac{16}{d}$

$16/d$ doit être entier, donc $d = \{1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16\}$

$x = d + 4 \Rightarrow\ x = \{5 ; 6 ; 8 ; 12 ; 20\}$

d est un diviseur de x^2, or, par définition, si x est pair, d et x^2/d doivent être pairs. $20^2/16 = 25$ n'est pas pair donc x =20 exclu.

$\Rightarrow x = \{5 ; 6 ; 8 ; 12\}$.

5 et 12 sont les côtés du premier triangle.

6 et 8 sont les côtés du deuxième triangle.

11. **La surface d'un triangle rectangle est un multiple de 6.**

    S est un multiple de 6 car le produit xy est un multiple de 12 (voir le point 12).

12. La parité de x, y et z :

<table>
<tr><th><u>x</u></th><th><u>d</u></th><th><u>y</u></th><th><u>z</u></th><th></th></tr>
<tr><td>impair</td><td>impair</td><td>Pair</td><td>impair</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">pair</td><td rowspan="2">Pair</td><td>Pair</td><td>pair</td><td>Si x = 4n et d = 4n' ou x = 4n+2 et d = 4n'+2
(x <u>et</u> d sont tous 2 multiples de 4 <u>ou</u> les 2 ne le sont pas)</td></tr>
<tr><td>impair</td><td>impair</td><td>Si x = 4n et d = 4n'+2 ou x = 4n+2 et d = 4n'
(x <u>ou</u> d est un multiple de 4)</td></tr>
</table>

Si x est premier alors y est multiple de 12.

Si x n'est pas multiple de 3 alors y est multiple de 12

Si x est multiple de3 alors y est multiple de 4.

- ➔ Le produit xy est toujours un multiple de 12.
- ➔ Le périmètre x+y+z est toujours un nombre pair.

13. **Si x est impair, le premier triangle à base de x est primitif** (les trois côtés n'ont pas de diviseur commun)

    Le premier triangle est calculé à partir de d = 1, or z – y = d = 1. Donc z et y n'ont pas de diviseur commun.

14. **Les 2 côtés d'un triangle ne peuvent pas être premiers.**

    Pour être premier, il faut être impair (rappelons que $x \geq 3$), or si x est impair, y est toujours pair (voir le point 12) donc non premier.

15. **L'aire d'un triangle rectangle n'est pas un carré parfait.**

    $S = xy/2 \rightarrow S = x\frac{x^2-d^2}{4d}$

On suppose que S est un carré : $S = n^2 \rightarrow \frac{x^2-d^2}{d} = \frac{(2n)^2}{x}$ ①

$x\frac{x^2-d^2}{4d} = n^2$

$\rightarrow d^2 + \frac{(2n)^2}{x}d - x^2 = 0$

On fixe x et on cherche les variables d (diviseurs de x^2) qui peuvent vérifier cette équation.

Voir le chapitre $x^2+bx+c=0$ pour comprendre la suite :

$$\frac{(2n)^2}{x} = \frac{-x^2+d'^2}{2d'}$$ **② ; d' : diviseur de $-x^2$, $-x \leq d' \leq x$**

Les solutions sont :

- **d = d'** ③
- **d = $-x^2/d'$** ④

①=② $\rightarrow \frac{x^2-d^2}{d} = \frac{-x^2+d'^2}{2d'}$

③ : d=d' $\rightarrow \frac{x^2-d^2}{d} = \frac{-x^2+d^2}{2d}$

$\rightarrow x = d$

④ : $d = -x^2/d' \rightarrow \frac{x^2-d^2}{d} = \frac{-x^2+(\frac{-x^2}{d})^2}{-2\frac{x^2}{d}}$

$\rightarrow x = d$

Dans les 2 cas $d = x \rightarrow y = \frac{x^2-d^2}{2d} = 0$

$\rightarrow x^2 + 0 = x^2$ est la seule solution.

Exemples

1. Calculer tous les triangles de Pythagore dont l'un des deux côtés vaut 63.

$x = 63$; $x^2 = 3969$

a) Les diviseurs de 3969 :

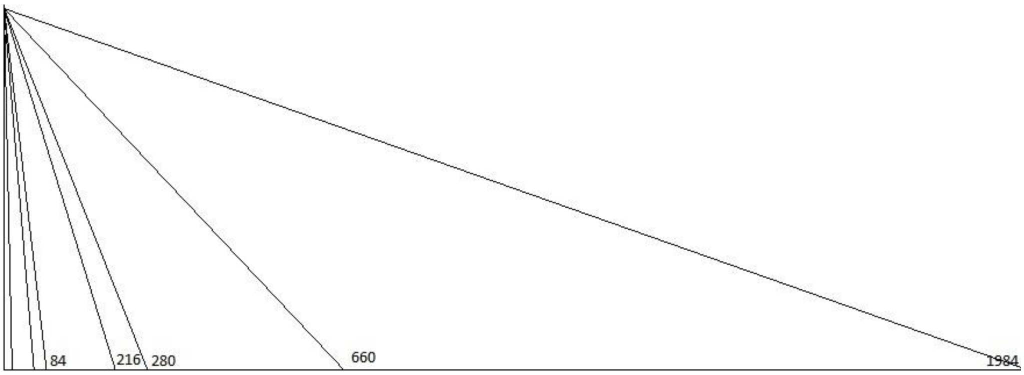
3969	3	1	3			
1323	3	9				
441	3	27				
147	3	81				
49	7	7	21	63	189	567
7	7	49	147	441	1323	3969
1	1					

$d_{(3969)} = \{1, 3, 7, 9, 21, 27, 49\}$ (d doit être inférieur à 63)
$Nd_{(3969)} = 7$ diviseurs, donc il existe 7 triangles dont l'un des deux côté vaut 63.

b) Remplacer d dans $3969 + (\frac{3969-d^2}{2d})^2 = (\frac{3969+d^2}{2d})^2$ par ses valeurs pour calculer y et z de chaque triplet.

$d = 1$	63^2	+	1984^2	=	1985^2
$d = 3$	63^2	+	660^2	=	663^2
$d = 7$	63^2	+	280^2	=	287^2
$d = 9$	63^2	+	216^2	=	225^2
$d = 21$	63^2	+	84^2	=	105^2
$d = 27$	63^2	+	60^2	=	87^2
$d = 49$	63^2	+	16^2	=	65^2

c) Représentation graphique des triangles à base de 63 :



Seuls les premier et dernier triangles (63, 1984, 1985) et (63, 16, 65) sont primitifs.

D. Diagrammes

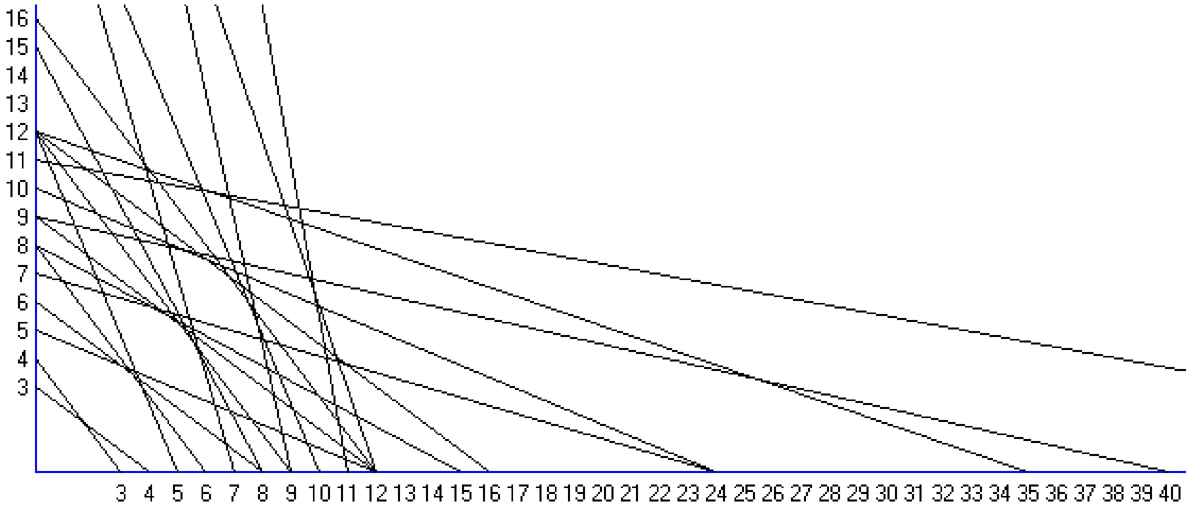
C'est la représentation graphique des triplets pythagoriciens $(x, \frac{x^2-d^2}{2d}, \frac{x^2+d^2}{2d})$

Pour chaque abscisse x, on calcule les ordonnés $y_i = \frac{x^2-d_i^2}{2d_i}$ (d_i sont les diviseurs de x^2, $0 < d_i < x$)

Tableau de quelques valeurs :

x	d	y	x	d	y	x	d	y
3	1	4	8	2	15	11	1	60
4	2	3		4	6	12	2	35
5	1	12	9	1	40		4	16
6	2	8		3	12		6	9
7	1	24	10	2	24		8	5

…



Ce diagramme représente les 15 premiers triangles obtenus par x = 3 à x = 12.

Et si on augmentait le nombre de triangles ? x = 3 à 150 par exemple.

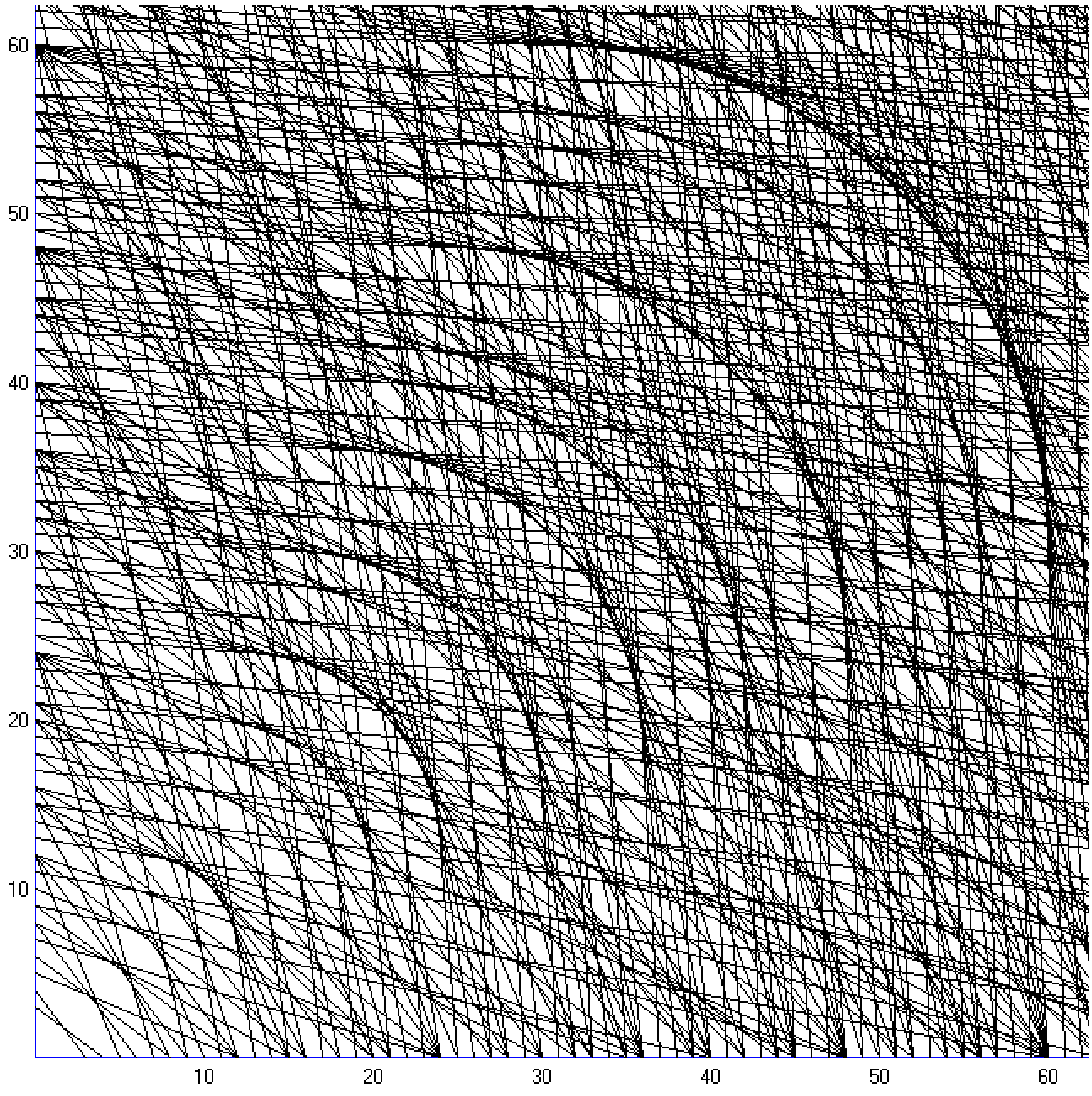


Diagramme D2

Et si on augmentait davantage le nombre de triangles et réduisait l’échelle ?

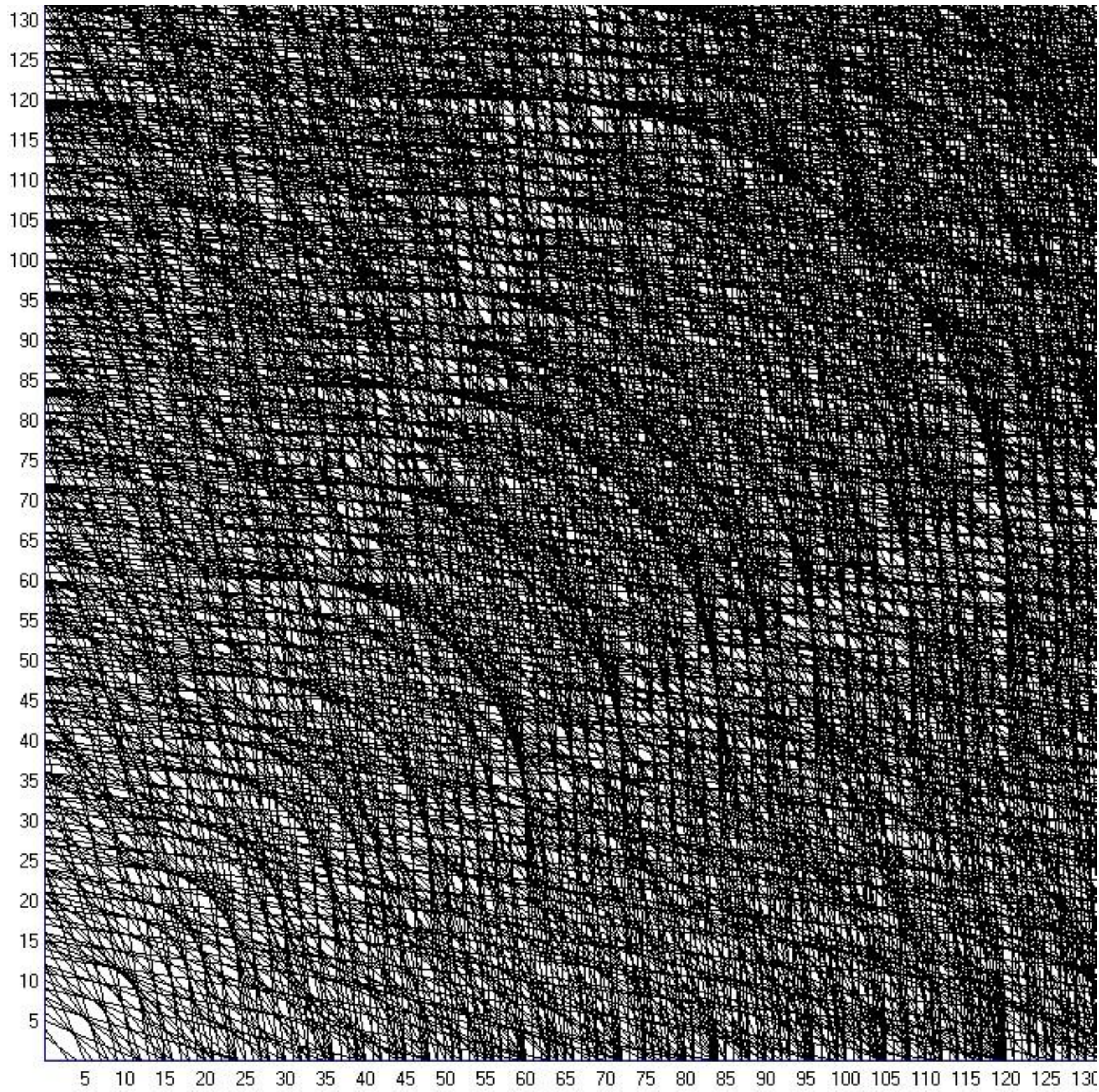


Diagramme D3

Et on réduit encore l’échelle…

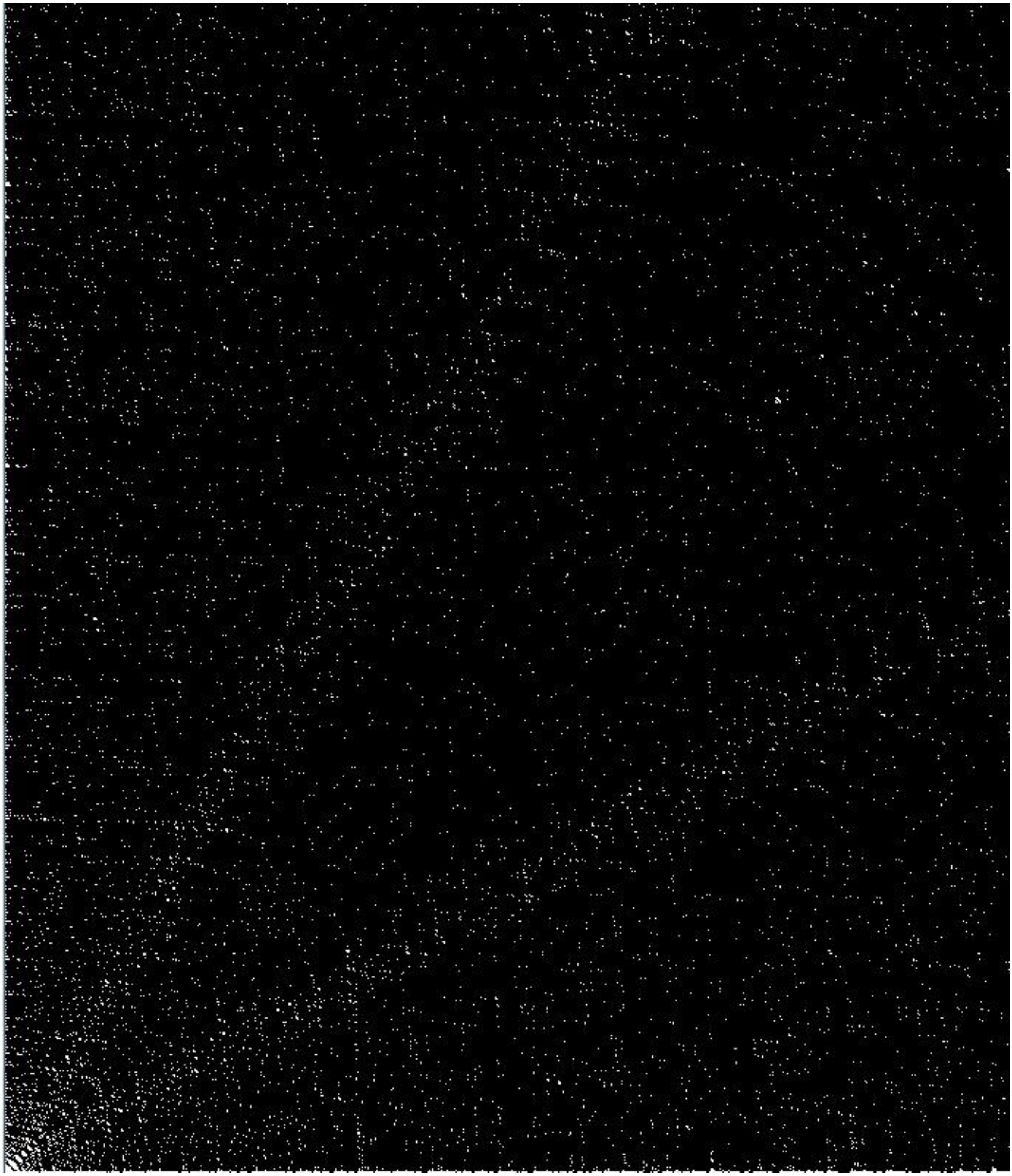


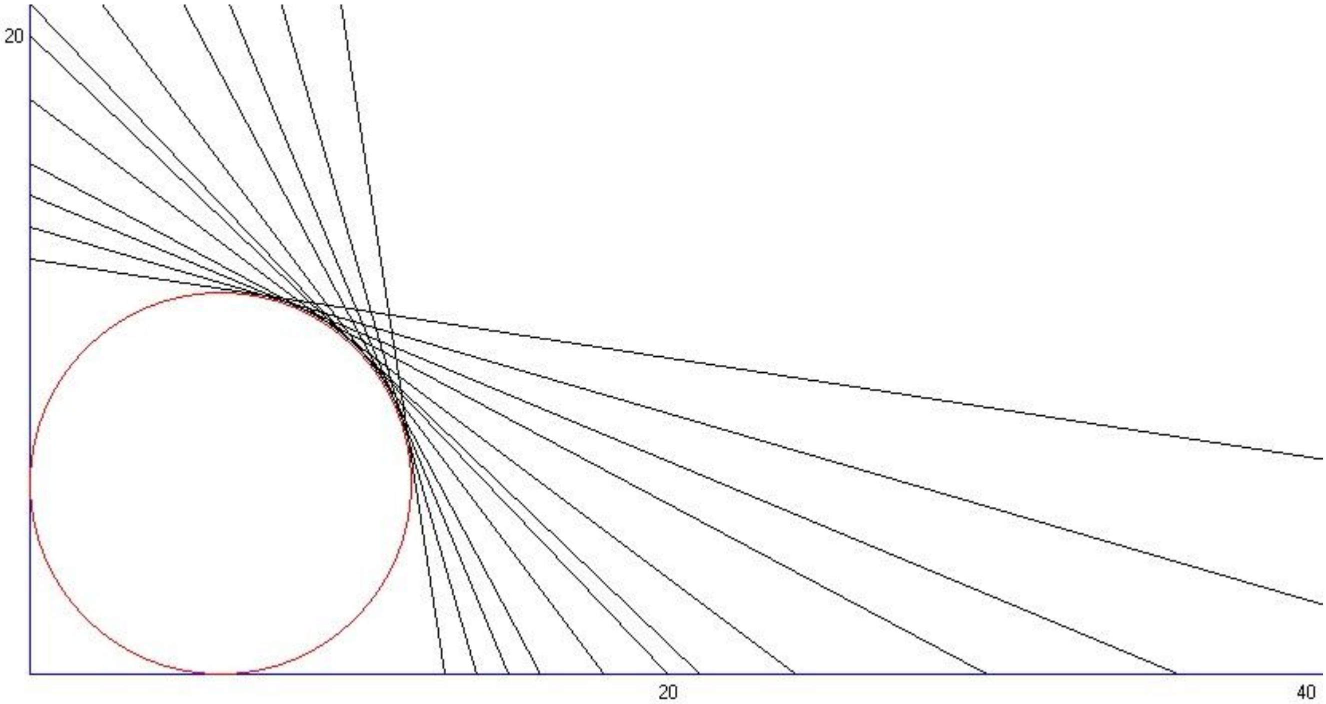
Diagramme D4

Sur les diagrammes D2 et D3, on distingue des arcs formés par les hypoténuses des triangles. Ces arcs appartiennent à des cercles de diamètres x – 1 pour tout x impair. Le premier triangle formant l'arc est $(x, (x^2 - 1)/2, (x^2 + 1)/2)$.

Le 6ème arc par exemple est formé pas les hypoténuses de ces triangles :

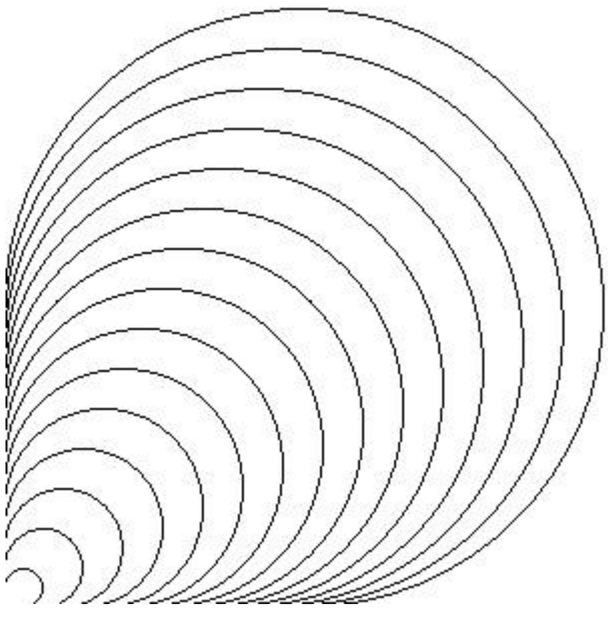
x	y	z	d
13	84	85	1
14	48	50	2

15	36	39	3
16	30	34	4
18	24	30	6
20	21	29	8
21	20	29	9
24	18	30	12
30	16	34	18
36	15	39	24
48	14	50	36
84	13	85	72

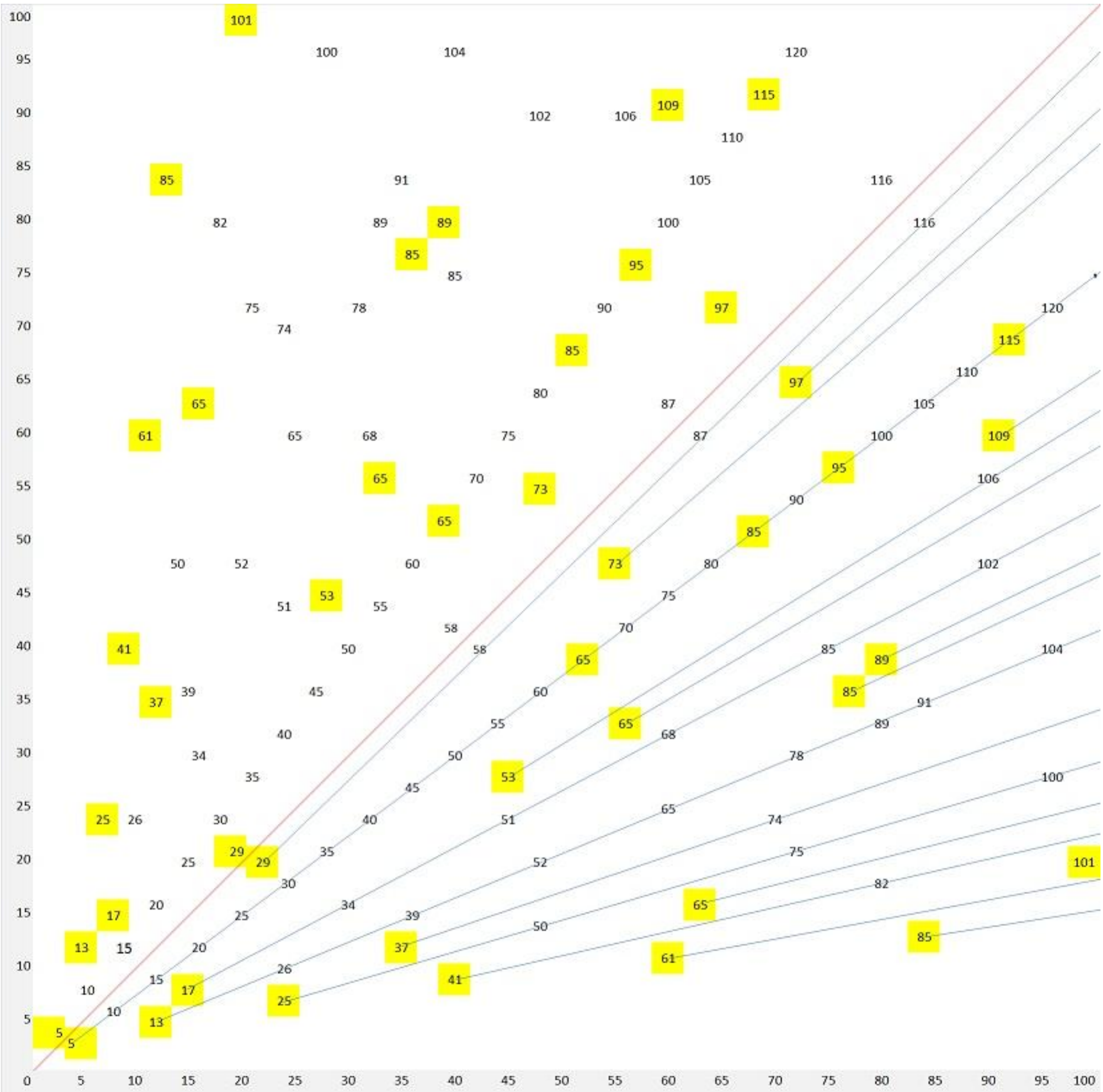


Le diamètre du cercle est 12 (13 - 1).

Un arc est formé pour tous les x impairs. Ces arcs ont les diamètres 2, 4, 6, 8, 10, 12… Certains arcs sont plus foncés (il y a plus de tangentes qui les dessinent), leur diamètres sont 12, 20, 24, 30, 36, 40, 42, 48, 60…



Voici une autre représentation graphique : x en abscisse, y en ordonnée. Les valeurs de z en jaune indiquent qu'il s'agit de triplets primitifs. Les valeurs sur la même droite sont les multiples.



E. Triangles de Pythagore presque isocèles

Il existe une infinité de triangles de Pythagore presque isocèles (c'est-à-dire des triangles dans lesquels les deux côtés ou l'hypoténuse et un côté diffèrent de 1)

Théorème 4c

Tous les triangles dans lesquels l'hypoténuse et un côté diffèrent de 1 sont de la forme :

$\left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x^2-1}}{\mathbf{2}}, \frac{\mathbf{x^2+1}}{\mathbf{2}}\right)$ (x est un entier impair supérieur ou égal à 3)

Les premiers triangles sont :

X	Triplet
3	(3, 4, 5)
5	(5, 12, 13)
7	(7, 24, 25)
9	(9, 40, 41)
11	(11, 60, 61)
13	(13, 84, 85)
15	(15, 112, 113)

Remarque

- $y + z = x^2$.

Théorème 4d

Tous les triangles dont les côtés diffèrent de 1 sont de la forme :

$\mathbf{x = \frac{-1+\sqrt{2(z^2-1)+1}}{2}}$;
$\mathbf{y = x + 1}$;
$\mathbf{z_i = z_{i-1} + 4k_i}$; ($z_1 = 1$)

$\mathbf{k_i = 6k_{i-1} - k_{i-2}}$; ($k_1 = 0$ et $k_2 = 1$)

k = {0; 1; 6; 35; 204; 1189…}, cette suite est les racines carrées des nombres à la fois triangulaires et carrés.

Démonstration :

$y - x = \frac{x^2-d^2}{2d} - x = 1.$
$\rightarrow d^2+2(x+1)d-x^2 = 0$
$\Delta = 4(2x^2+2x+1) \rightarrow d = -(x+1) + \sqrt{2x^2+2x+1}$
d est entier si $\sqrt{2x^2+2x+1}$ est entier.
Voir $ax^2 + bx + c$ = carré parfait pour comprendre la suite
$2x^2+2x+1$ est carré parfait si $x = \frac{-1\pm\sqrt{2(z^2-1)+1}}{2}$
$Z_i = z_{i-1} + 4k_i$

$k = \{0 ; 1 ; 6 ; 35 ; 204 ; 1189...\}$; $k_j = 6k_{j-1} - k_{j-2}$

i =	1	2	3	4	5	...
k =	0	1	6	35	204	
z =	1	5	29	169	985	
x_1 =	0	3	20	119	696	
$y = -x_2$	1	4	21	120	697	

Les premiers triangles sont (3, 4, 5), (20, 21, 29), (119, 120, 169), (696, 697, 985)

Théorème 4e

Les triangles dont les côtés diffèrent de 1 sont aussi de cette forme :

- $(x_i^2 - x_{i-1}^2, x_i^2 - x_{i-1}^2 + 1, x_{2i-1})$ si i est pair
- $(x_i^2 - x_{i-1}^2 - 1, x_i^2 - x_{i-1}^2, x_{2i-1})$ si i est impair

Avec $x_i = 2x_{i-1} + x_{i-2}$; $x_1=1$ et $x_2=2$
$x_i = \{1; 2; 5; 12; 29; 70; 169; 408; 985; 2378; 5741; 13860; 33461; 80782; 195025 ...\}$

Les premiers triangles sont :

i	x_i	x_{i-1}	x_{2i-1}	Triplet
2	2	1	5	(3, 4, 5)
3	5	2	29	(20, 21, 29)
4	12	5	169	(119, 120, 169)
5	29	12	985	(696, 697, 985)
6	70	29	5741	(4059, 4060, 5741)
7	169	70	33461	(23660, 23661, 33461)
8	408	169	195025	(137903, 137904, 195025)