Accueil

# $ax^2 + bx + c = z^2$

## A. $a =$ carré

### Théorème 2a

Soit a un carré, b et c deux entiers relatifs, $ax^2 + bx + c$ est carré parfait si et seulement si

$$x = \frac{-b \pm \frac{\Delta + d^2}{2d}}{2a}; \quad \Delta = b^2 - 4ac$$

d étant un diviseur de $|\Delta|$. $0 < d \leq \sqrt{|\Delta|}$

1. Si $\Delta = 0$, alors $ax^2 + bx + c = (\sqrt{a}x + \sqrt{c})^2$
   L'ensemble des solutions est l'ensemble des entiers relatifs.

2. Si b est pair, d et $|\Delta|/d$ doivent être pairs.

3. Si b est pair, $d/2$ et $|\Delta|/2d$ doivent avoir la même parité.

### Remarques

- Le nombre de solutions entières de cette équation est inférieur ou égal au nombre de diviseurs de $|\Delta|$, sauf si $\Delta$=0, le nombre de solutions est infini.

- Si $a = 1$, toutes les solutions de la formule sont entières, c'est-à-dire que chaque diviseur retenu (vérifiant les conditions 2 et 3), produit une solution entière.

- Si $a > 1$, certaines valeurs de x peuvent ne pas être entières. Les valeurs entières de x, si elles existent, sont l'ensemble des solutions de l'équation.

### Exemples

1. Calculer l'ensemble des entiers x pour que $x^2 + 17x + 10$ soit carré parfait.

$\Delta = b^2 - 4ac = 249$
$d_{(249)} = \{1; 3\}$

| | | |
|---|---|---|
| d = | 1 | 3 |
| x' = | 54 | 13 |
| x" = | -71 | -30 |

L'ensemble des solutions est x = {-71; -30; 13; 54}

2. Calculer l'ensemble des entiers x pour que $x^2 + 60$ soit carré parfait.

$\Delta = b^2 - 4ac = -240$
$d_{(240)} = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 8; 10; 12; 15\}$
$d_{(240)} = \{4; 12\}$ ; (car d/2 et $|\Delta|$/2d doivent être pairs)

| | | |
|---|---|---|
| d = | 4 | 12 |
| x = | $\pm$ 14 | $\pm$ 2 |

L'ensemble des solutions est x = {-14; -2; 2; 14}

3. Calculer l'ensemble des entiers x pour que $x^2 + 12x - 108$ soit carré parfait.

$\Delta = b^2 - 4ac = 576$
$d_{(576)} = \{4; 8; 12; 16; 24\}$ (les autres diviseurs ne sont pas retenus car ils ne satisfont pas aux conditions 2 et 3 du théorème)

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| d = | 4 | 8 | 12 | 16 | 24 |
| x' = | -43 | -26 | -21 | -19 | -18 |
| x" = | 31 | 14 | 9 | 7 | 6 |

L'ensemble des solutions est x = {-43; -26; -21; -19; -18; 6; 7; 9; 14; 31}

4. Résoudre $49x^2 + 125x - 50 = z^2$.

$\Delta = 125^2 - 4 * 49 * (-50) = 25425$
$d_{25425} = \{1; 3; 5; 9; 15; 25; 45; 75; 113\}$

<table>
<tr><td>d =</td><td>1</td><td>3</td><td>5</td><td>9</td><td>15</td><td>25</td><td>45</td><td>75</td><td>113</td></tr>
<tr><td>x' =</td><td>-131</td><td colspan="3" rowspan="2">$\notin$ N</td><td>-10</td><td colspan="3" rowspan="2">$\notin$ N</td><td>-3</td></tr>
<tr><td>z' =</td><td>908</td><td>60</td><td>4</td></tr>
<tr><td>x" =</td><td colspan="9">$\notin$ N</td></tr>
</table>

L'ensemble des solutions est x = {-131; -10; -3}

5. Résoudre $25x^2 - 70x + 49 = z^2$.

$\Delta = 70^2 - 4 * 25 * 49 = 0$

$\Delta = 0$ donc $\forall x \in Z$, $25x^2 - 70x + 49$ est un carré parfait.

---

## B. a ≠ carré

**Théorème 2b**

Pour savoir si $ax^2 + bx + c$ = carré parfait, on calcule

$\delta = 2\sqrt{4a\left(a - c - \left[\frac{b^2-4ac}{4a}\right]\right) + b^2 - 4|a|n}$ ; ($n \in \aleph$)

Si aucune valeur de $\delta$ n'est entière alors $ax^2 + bx + c$ n'est pas un carré parfait.
Si au moins une valeur de $\delta$ est entière alors $ax^2 + bx + c = z^2$ admet un nombre infini de solutions.

Les solutions sont les valeurs entières de $\boldsymbol{z} = \sqrt{\frac{\left(4|a|n+\frac{4|a|\pm\delta}{2}\right)^2-b^2+4ac}{4a}}$ ; ($n \in \aleph$)

**Exemple**

Calculer les valeurs de x pour que $5x^2 + 4x - 8$ soit carré parfait.

$\delta = 2\sqrt{116 - 20n}$ ;

| n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\delta$ | $\notin \aleph$ | | | | 12 | 8 | imp |

$\delta \in \aleph$ donc il existe des entiers x tel que $5x^2 + 4x - 8$ est un carré.

$$z_1 = \sqrt{\frac{(20n + \frac{20-\delta}{2})^2 - 176}{20}}$$

$$z_2 = \sqrt{\frac{(20n + \frac{20+\delta}{2})^2 - 176}{20}}$$

$\delta = 12$

| n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $z_1$ | | | | 14 | | |
| $z_2$ | 2 | | | | | |

$\delta = 8$

| n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $z_1$ | | 5 | | | 19 | |
| $z_2$ | 1 | 7 | | | | |

L'ensemble des solutions est
z = {1 ; 2 ; 5 ; 7 ; 14 ; 19 ; 37 ; 50 ; 97 ; 131 …}.
x = {… -59 ; -17 ; -9 ; -3 ; -2 ; 1 ; 3 ; 6 ; 22 ; 43 …}.