Accueil

Triangles rectangles ayant un périmètre p

L'objectif de cet article est d'expliquer comment calculer le ou les triangles rectangles ayant un périmètre donné.

Soit (x, y, z) un triangle rectangle en (x, y).
Nous cherchons les entiers x, y et z tel que $x + y + z = p$ (p entier connu).

Ma formule 4a appliquée aux triangles rectangles est :

$$x^2 + \left(\frac{x^2 - d^2}{2d}\right)^2 = \left(\frac{x^2 + d^2}{2d}\right)^2$$

(d étant un diviseur de x^2. $0<d<x$)

$x + y + z = p$.

$x + \frac{x^2-d^2}{2d} + \frac{x^2-d^2}{2d} = p$.

$x + \frac{x^2}{d} = p$.

$\rightarrow x^2 + dx - dp = 0$.

C'est une équation de 2nd degré, donc $x = \frac{-d+\sqrt{d^2+4dp}}{2}$

Pour que x soit entier, il faut que $\sqrt{d^2 + 4dp}$ soit entier. Pour le démontrer, on se servira de ma formule 2a (voir détail dans cette page pour bien comprendre la suite).

Pour démontrer que $d^2 + 4dp$ soit carré parfait, on calcule $\mathbf{\Delta_2 = 16p^2}$, et on cherche les diviseurs d_2 de $16p^2$ $(0<d_2<4p)$.
Nous obtenons donc :

$$\mathbf{d = \frac{-4p + \frac{16p^2 + d_2^2}{2d_2}}{2}}$$

$$\mathbf{x = \frac{-d + \sqrt{d^2 + 4dp}}{2}}$$

$$\mathbf{y = \frac{x^2 - d^2}{2d}}$$

$$\mathbf{z = y + d}$$

d_2 : diviseur de $16p^2$; $(0<d_2<4p)$

d_2 et $\frac{16p^2}{d_2}$ doivent être pairs

$\frac{d_2}{2}$ et $\frac{8p^2}{d_2}$ doivent avoir la même parité

d et x doivent avoir la même parité

Et voilà, nous avons tous les outils pour calculer x, y et z en ne connaissant que p. Voyons cela en détail avec un exemple.

Nous cherchons le ou les triangles rectangles, s'ils existent, ayant un périmètre p = 180. Procédons par étape, avec les explications du tableau de calcul :

1. On calcule $\Delta_2 = \mathbf{16p^2}$ → $\Delta_2 = 518400$;
2. On cherche tous les diviseurs d_2 de 518400, d_2 doit être pair et $\mathbf{0<d_2<4p}$;
3. On vérifie les conditions de validité de chacun des diviseurs d_2 :
   Dans la colonne Δ_2/d_2, 2025 est en rouge car elle est impaire. Donc le diviseur 256 ne sera pas retenu.
   Dans les colonnes $d_2/2$ et $\Delta_2/2d_2$, certaines valeurs sont en rouge car elles n'ont pas la même parité. Donc les diviseurs d_2 correspondants ne seront pas retenus.
4. Ensuite, on calcule d pour chacune des valeurs retenues de d_2 : $\mathbf{d} = \dfrac{-4p + \frac{16p^2 + d_2^2}{2d_2}}{2}$;
5. Puis $\mathbf{x} = \dfrac{-d + \sqrt{d^2 + 4dp}}{2}$;
   Certaines valeurs des colonnes d et x sont en rouge car elles n'ont pas la même parité. Donc inutile de calculer y et z correspondant car ils ne sont pas des entiers;
6. Ensuite, on calcule $\mathbf{y} = \dfrac{x^2 - d^2}{2d}$ et $\mathbf{z = y + d}$

p	Δ_2 $16\,p^2$	d_2	Conditions Δ_2 / d_2	 $d_2 / 2$	 $\Delta_2 / 2d_2$	d $((16p^2+d_2^2)/2d_2-4p)/2$	x $(-d+\mathrm{sqrt}(d^2+4dp))/2$	y $(x^2 - d^2) / 2d$	z y + d
180	518400	2	259200	1	129600				
		4	129600	2	129600	32041	179	-16020	16021
		6	86400	3	43200				
		8	64800	4	32400	15842	178	-7920	7922
		10	51840	5	25920				
		12	43200	6	21600	10443	177	-5220	5223
		16	32400	8	16200	7744	176	-3870	3874
		18	28800	9	14400				
		20	25920	10	12960	6125	175	-3060	3065
		24	21600	12	10800	5046	174	-2520	2526
		30	17280	15	8640				
		32	16200	16	8100	3698	172	-1845	1853
		36	14400	18	7200	3249	171	-1620	1629
		40	12960	20	6480	2890	170	-1440	1450
		48	10800	24	5400	2352	168	-1170	1182
		50	10368	25	5184				
		54	9600	27	4800				
		60	8640	30	4320	1815	165	-900	915
		64	8100	32	4050	1681	164		
		72	7200	36	3600	1458	162	-720	738
		80	6480	40	3240	1280	160	-630	650
		90	5760	45	2880				
		96	5400	48	2700	1014	156	-495	519
		100	5184	50	2592	961	155	-468	493
		108	4800	54	2400	867	153	-420	447
		120	4320	60	2160	750	150	-360	390
		128	4050	64	2025				
		144	3600	72	1800	576	144	-270	306
		150	3456	75	1728				
		160	3240	80	1620	490	140	-225	265
		162	3200	81	1600				
		180	2880	90	1440	405	135	-180	225
		192	2700	96	1350	363	132		
		200	2592	100	1296	338	130	-144	194

216	2400	108	1200	**294**	**126**	-120	174
240	2160	120	1080	**240**	**120**	-90	150
256	**2025**						
270	1920	**135**	**960**				
288	1800	144	900	**162**	**108**	-45	117
300	1728	150	864	**147**	**105**	-36	111
320	1620	160	810	**125**	**100**		
324	1600	162	800	**121**	**99**	-20	101
360	1440	180	720	**90**	**90**	0	90
384	1350	**192**	**675**				
400	1296	200	648	**64**	**80**	18	82
432	1200	216	600	**48**	**72**	30	78
450	1152	**225**	**576**				
480	1080	240	540	**30**	**60**	45	75
540	960	270	480	**15**	**45**	60	75
576	900	288	450	**9**	**36**		
600	864	300	432	**6**	**30**	72	78
640	810	**320**	**405**				
648	800	324	400	**2**	**18**	80	82
720							

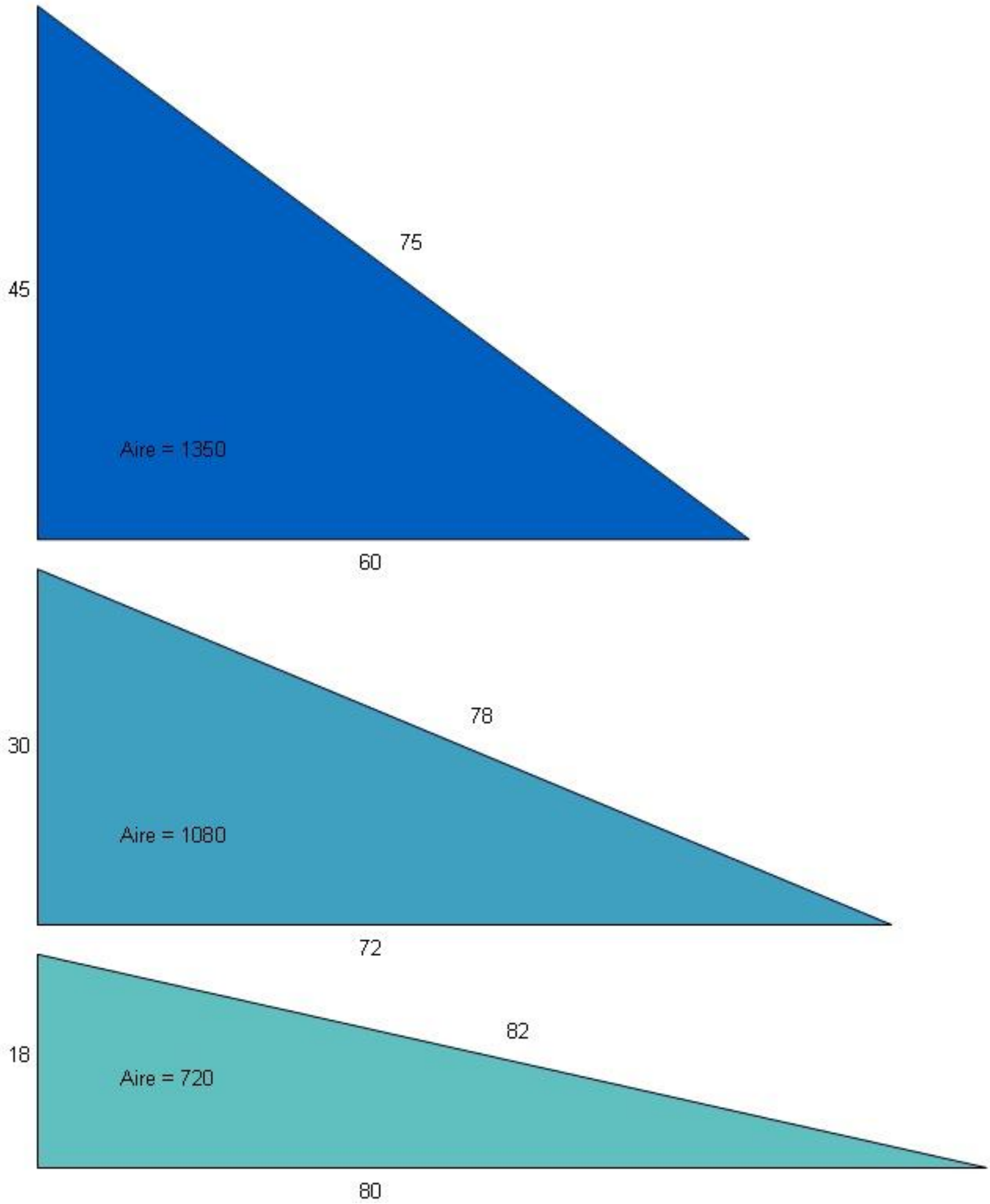
Nous obtenons 33 résultats répondants à $x^2 + y^2 = z^2$ et $x + y + z = 180$:

$179^2 + (-16020)^2 = 16021^2$ et $179 - 16020 + 16021 = 180$
...
$18^2 + 80^2 = 82^2$ et $18 + 80 + 82 = 180$.

Sur ces 33 résultats, seuls 6 triplets ont les trois valeurs positives. Ces triplets sont ceux obtenus par $\mathbf{2p < d_2 < 4p}$, ils sont en vert dans le tableau.
Ces 6 triplets sont en doublon car la formule distingue entre (18, 80, 82) et (80, 18, 82) par exemple.
Nous avons donc 3 triplets différents dont les 3 valeurs sont positives.
Donc il existe 3 triangles rectangles dont le périmètre est égal à 180 :
(18, 80, 82), (30, 72, 78) et (45, 60, 75).

Remarque :

Avant de vous lancer dans des tests, sachez que le périmètre d'un triangle rectangle est toujours un nombre pair.
$p = x + \frac{x^2}{d}$.
Si x est pair, x^2/d, par définition, doit être pair. Donc p est pair
Si x est impair, d et x^2/d sont forcément impairs. Donc p est pair.


75
45
Aire = 1350
60
78
30
Aire = 1080
72
82
18
Aire = 720
80